



TITLE:

凝縮効果に基づく(時)空間の物理的  
創発(オイラー方程式の数理解析:力学  
と変分原理250年)

AUTHOR(S):

小嶋, 泉

---

CITATION:

小嶋, 泉. 凝縮効果に基づく(時)空間の物理的創発(オイラー方程式の数理解析:力学と変分原理250年). 数理解析研究所講究録 2011, 1749: 84-91

ISSUE DATE:

2011-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171102>

RIGHT:

# 凝縮効果に基づく (時) 空間の物理的創発

小嶋 泉 (京都大学数理解析研究所)

## Abstract

Einstein 以降,《物理学の幾何学化》という発想の普及と共に,物理学を幾何学に吸収・還元することによって,物理学諸理論の統一的展開を図ることが常識化した。しかし,そのとき理論の出発点に置かれる幾何学的諸概念・描像を,認識論的・存在論的に支えている基礎は一体何だろうか?幾何学的時空点を,具体的・物理的に指定する手段・方法なしに,抽象的に「同定」するだけで,物理学の理論的基礎が定まるのだろうか?ここでは,時空の幾何学的描像の「物理的根拠」を,対称性の破れに伴う「凝縮状態」の概念に求める試みをお話したい。

## 1 《物質運動 vs. 時空》の相互関係:「ニワトリと卵」?

一般相対論の延長線上に電磁・重力統合を目論んだ Einstein の統一場理論以降,《[物理学の幾何学化] = 幾何学化原理》の考えが,局所ゲージ不変性の役割増大に伴って現代物理学を深く捉えてきた。一般相対論それ自体に備わる物質運動と時空の双方向的扱い:

見えるマクロ世界      〇

時空

Einstein 方程式  $\uparrow\downarrow$ : 共変微分と測地線

見えないミクロ量子世界      〇

物質運動

とは対照的に,《幾何学化原理》では専ら《時空  $\rightarrow$  物質運動》の一方向のみが focus up される: e.g., 湯川素領域理論・超弦理論では,時空座標あるいは string  $X^\mu(\tau, \sigma)$  の固有振動モード (+ “branes” = soliton modes) が素粒子の種類を決めるというように。つまり,デカルト的「拡がり」概念  $X^\mu(\tau, \sigma)$  が「質」に先行し,質を担った「モノ・物質」は全て時空的「拡がり」概念に吸収されるべしというのが今日の「標準的」発想になっている。

しかし,古典時空から量子的物質運動を導き出すことはできない相談だから,現実のシナリオは,

古典的物質運動 + 古典時空

??  $\nearrow$

量子的物質運動

↑  
「量子時空」

という形に「重層化」され(= 問題のすり替え),それに伴って結局,量子レベルと古典レベルは分離され,その相互関係は不問に付されてしまう。《量子レベルだけが本物で,その粗い近似像に「過ぎない」古典レベルなど無視し

て、量子レベルの真理に focus すれば十分》という今日広く流布した「信念」を思い起こせば、こういう論じ方になるのも、別段驚くべきことではないかも知れない。ただしこのやり方だと、物質運動 vs. 時空の相互関係如何？という最初の設問に伏在する重要なポイント：

「時空概念の普遍的役割とその根拠」、  
を見出す手掛かりは見落とされてしまう。ここでは、  
「ミクロ・マクロ双対性」= [「量子古典対応」の数学的・方法論的定式化]  
に基づいて、

ミクロ物質運動  $\xrightarrow{\text{創発}}$  マクロ古典時空

という創発過程の解明を通して、この「時空概念とその普遍的役割の物理的起源」に迫ることを試みたい。そのために、重要な働きをするのは、以下のような概念装置である：

1) 《[セクター=純粋相] vs. 混合相》と[量子・古典境界]：

通常の量子力学での物理量の数学的扱いは、unitary 同値表現を同一視して[：Dirac 変換理論]，専ら既約表現を考察する[：重ね合わせの「原理」]が、これは有限自由度量子系の特殊性[：Stone-von Neumann 一意性定理]に本質的に依存したやり方で、無限自由度系には適さない。自由度が無限になると、既約分解の一意性は保証されず[：非 I 型]，表現の unitary 同値性は微小な外部摂動で容易に崩れ、operational な安定性が欠けている。このため、物理量の代数の表現は、準同値関係=[unitary 同値 up to 重複度]によって分類することが必要で、表現・状態の「最小」単位は既約表現・純粋状態ではなく、factor 表現・状態 with trivial center で与えられる。例えば、量子統計力学で重要な熱平衡状態 = Gibbs states は全て混合状態であり純粋状態ではないが、熱平衡状態としてこれ以上分解できない最小単位は熱力学的純粋相であり、数学的には factor 状態に対応する。

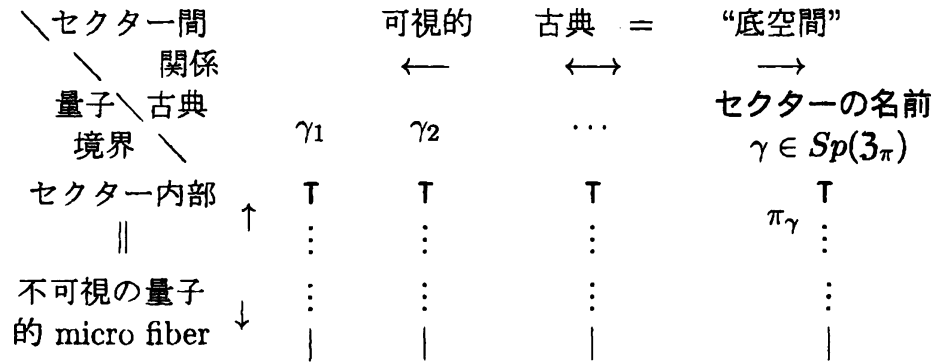
以下では、factor 表現・状態を数学的文脈で「セクター」、物理的文脈では「純粋相」と呼ぶことにする：

factor 表現・状態 with trivial center = 「セクター」= 「純粋相」。

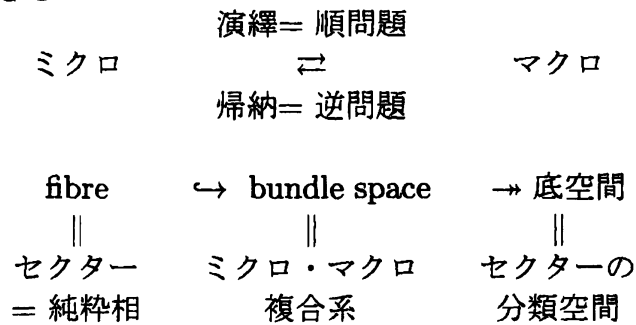
Center が非自明な一般の表現・状態は、可換環である center を同時対角化して得られる「中心分解」によって、「純粋相」の直和（または直積分）として一意的に表わされ、これを「混合相」と呼べば、

混合相 = non-factor 表現・状態 with non-trivial center =  $\int_{\gamma \in \text{相分類空間}}^{\oplus} (\text{純粋相})_{\gamma} d\mu(\gamma)$ 。

ただし、積分領域として「相分類空間」と書いたのは、center  $3_{\pi}$  のスペクトル  $\text{Spec}(3_{\pi})$  のことだが、その 1 点 1 点が異なる純粋相 = セクターに対応することを考えると、center  $3_{\pi}$  の元とは order parameter であり、 $\text{Spec}(3_{\pi})$  とはその order parameter の実現値によって純粋相の全体を分類する空間であり、熱力学・統計力学における相転移の議論で重要な「相図」(phase diagram) の概念の一般化に他ならない。その状況をシェーマ化すれば：



2) ミクロ・マクロ双対性: ミクロ  $\overset{\text{双対}}{\rightleftharpoons}$  マクロ から帰結する演繹 と帰納 の duality。種々の物理系の具体的記述の目的には、「ミクロ」,「マクロ」の同定はなるべく flexible にしておくのが都合がよいけれども, とりあえず, 上の「純粋相」,「混合相」という抽象的数学的解釈に沿って意味を特定するならば, ミクロ=個々のセクターの内部, マクロ=複数のセクター間の相互関係, と割り切って考えるのが都合がよい。このとき, ミクロ, マクロ両者の相互関係は, 次のように fiber bundle の描像によって要約的に理解することができる:



## 2 対称性の破れに付随する “Sector Bundle”

3) 対称性の (自発的) 破れ, その判定基準, 付随する凝縮効果 & 縮退真空  
 一般に物理系の対称性は, 物理変数のなす \*-代数  $\mathcal{F}$  に働く或る (局所コンパクト) 群  $G$  の (強連続) 変換作用  $G \curvearrowright \mathcal{F}$  によって記述される:  $\tau: G \ni g \mapsto \tau_g \in \text{Aut}(\mathcal{F})$  [:  $\mathcal{F}$  の \*-自己同型群]。

自発的破れの一般的定義 ([1]):

**Definition 1**  $\mathcal{F}$  の表現  $(\pi, \mathfrak{H})$  においてその中心  $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{F}) = \mathfrak{Z}(\pi(\mathcal{F}))''$  のスペクトル  $\text{Spec}(\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{F}))$  の各点が  $G$ -不変なら, この表現において  $(G, \tau)$  は *unbroken*, そうでない時自発的に破れているという。

対称性の自発的破れの本質は, マクロ変数 = 低エネルギーモードとしての秩序変数から成る中心が  $G$  の作用で動くということで, つまり, 自発的破れとは, 対称性の「赤外不安定性」を表わしている。

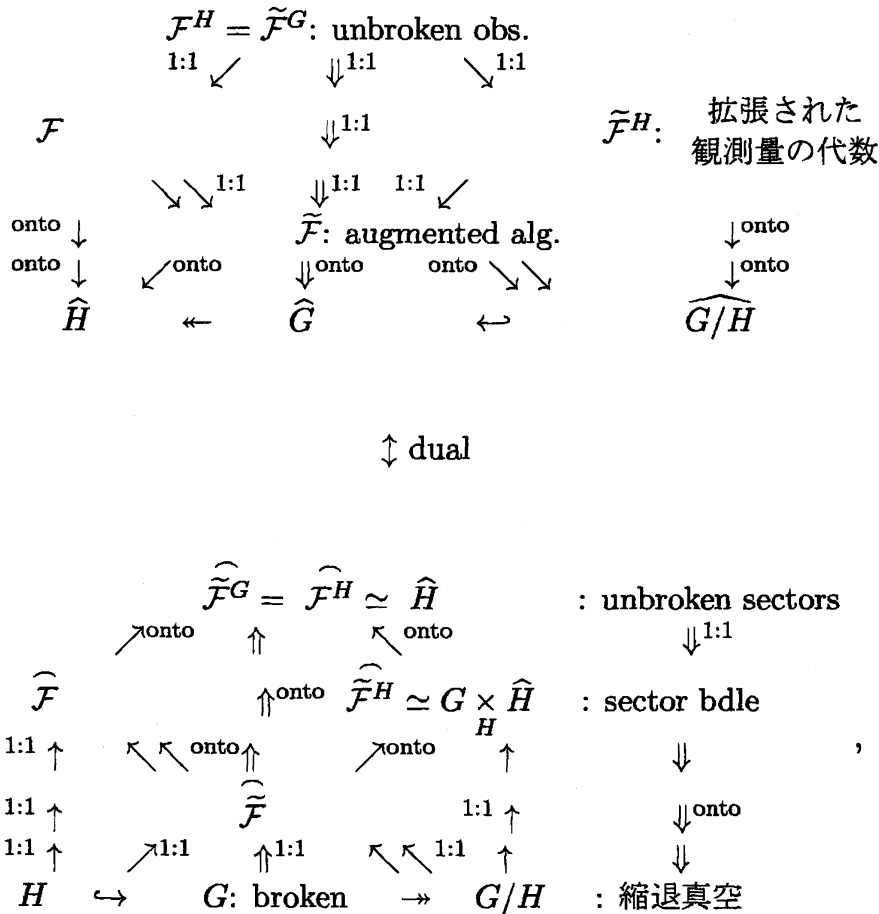
任意の表現は,  $G$ -*unbroken* な因子表現と  $G$ -中心エルゴード的非因子表現 (後者が SSB) との直和に分解され, 中心のスペクトル上に「相図」が描ける。

4) 対称性の破れの代数的定式化: augmented algebra とセクター間構造 = central spectrum of observable algebras  $\rightarrow$  sector bundle

$\mathcal{F}$  と等質空間の dual  $(H \setminus G)$  との (C\*-) 接合積として “augmented algebra”  $\tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \rtimes (H \setminus G)$  [1] を定義すると,  $\mathcal{F}$  の表現空間  $(\pi, \mathfrak{H})$  で群  $G$  の対称性が unbroken な部分群  $H$  を残して破れたとき,  $\mathcal{F} \curvearrowright H$  の共変表現:  $\pi(\tau_h(F)) = U(h)\pi(F)U(h)^*$  (for  $\forall h \in H$ ) から  $G$  への誘導表現  $Ind_H^G(U)$  と同値な  $G$  のユニタリ実現を持つ最小の (非可換 C\*-) 力学系  $\tilde{\mathcal{F}} \curvearrowright G$  が決まる。つまり, 力学系  $\mathcal{F} \curvearrowright H$  の表現  $(\pi, U, \mathfrak{H})$  から接合積  $\tilde{\mathcal{F}}$  の表現  $(\hat{\pi}, \hat{\mathfrak{H}})$  が誘導される。

$\tilde{\mathcal{F}}$  の固定部分環  $\tilde{\mathcal{F}}^G$  は定値写像  $\hat{F}: g \mapsto F \in \tilde{\mathcal{F}}^H$  で与えられ,  $\tilde{\mathcal{F}}^G \cong \mathcal{F}^H$ ;  $\tilde{\mathcal{F}}^H = \mathcal{F}^H \rtimes (H \setminus G)$ .

ここに関与する代数とその間の写像は次の可換図式で特徴づけられる:



セクター構造 = factor spectrum は, spectrum of centre algebra によって記述されるから,  $\tilde{\mathcal{F}}^H = (\mathcal{F}^H \rtimes (H \setminus G))$  の全セクター構造は, factor spectrum

$\widehat{\mathcal{F}}^H = G \times_H \hat{H}$  で与えられ, *sector bundle*,  $\hat{H} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{F}}^H = G \times_H \hat{H} \rightarrow G/H$  を構成する。その fibre は, unbroken sectors:  $\widehat{\mathcal{F}}^H = \text{Spec}(\mathfrak{Z}(\mathcal{F}^H)) = \hat{H} =$  コンパクト Lie 群  $H$  の既約ユニタリ表現の同値類から成る群双対, そして底空間として機能する等質空間  $G/H$  の物理的役割は, 対称性  $G$  の破れに伴う凝縮効果から産み出された「縮退真空」の全体を表わし, その 1 点 1 点に互いに disjoint な  $\mathcal{F}^H$ -表現が載っている。

この数学的意味は, 物理量に関する完全系列  $\mathcal{F}^H \hookrightarrow \widehat{\mathcal{F}}^H = \mathcal{F}^H \rtimes (\widehat{H \setminus G}) \rightarrow (\widehat{H \setminus G})$  に dual な系列  $\widehat{\mathcal{F}}^H = \hat{H} \leftarrow \widehat{\mathcal{F}}^H = G \times_H \hat{H} \leftarrow G/H$  の分裂 (splitting) = 接続 (connection) を与えている。

拡張された観測可能量の代数  $\widehat{\mathcal{F}}^H = \mathcal{F}^H \rtimes (\widehat{H \setminus G})$  に属する物理量  $\tilde{A} \in \widehat{\mathcal{F}}^H$  が持つ縮退真空の (分類) 空間  $G/H$  への函数依存性:  $\tilde{A} = (G/H \ni \xi \mapsto \tilde{A}(\xi) \in \mathcal{F}^H)$  は, 「定数対象」  $A \in \mathcal{F}^H$  を「函数対象」  $\tilde{A} \in \mathcal{F}^H \rtimes (\widehat{H \setminus G}) = \Gamma(G \times_H \mathcal{F}^H)$  に変換する「論理拡大」[5] の一例であり, 二値論理の文脈から多値論理への移行 (transfer principle) に対応する。

そこで縮退真空の空間  $G/H$  を (時) 空間に置き換えれば, 微視的物理世界からの (時) 空間創発に伴って, 物理量が (時) 空間依存性を獲得する状況の prototype が得られるではないか?

### 3 Emergence of Space-time as Symmetry Breaking

上の議論での broken larger group  $G$  が, 外部=時空的および内部対称性の両方を含む場合を考えよう。

簡単のため, 内部対称性に破れがなく破れの効果は全て外部由来と仮定すると, 前者は  $G$  の unbroken な部分群  $H$  に含まれ,  $G/H$  で記述される broken symmetry は全て時空の自由度に対応することになる。破れのパターンによっては, 空間回転や Lorentz boost のような非可換成分が  $G/H$  に含まれてもよいが, 典型的な場合,  $G/H = SL(2, \mathbb{C})/SU(2) \simeq \mathbb{R}^3$  のように  $G/H$  を時空, あるいは, その部分領域  $\mathcal{R}$  と見ることが可能である (対応する変換群の構造は時空領域から容易に再現できる)。

すると, unbroken な内部対称性の群  $H$ , および  $H$  が Galois 群として作用する量子場の local net  $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{R})$  を,  $H$ -不変量としての observables の local net  $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{R})$  および (その大域的) セクター構造に関するデータ  $\hat{H}$  から再現する Doplicher-Roberts 再構成 [4] に現れる可換図式と上に見た物理量の代数の可換図式との間に, 驚くべき並行性が成り立つことが分かる (ただし下 2 行は, 元々の Doplicher-Roberts の文脈では通常考えない):

$$\begin{array}{ccc}
H \swarrow \mathcal{F}^H = \tilde{\mathcal{F}}^G \searrow_{G/H} \tilde{\mathcal{F}}^H & & H \swarrow \mathcal{O}_\rho = \mathcal{O}_d^H \searrow_{\mathcal{R}} A(\mathcal{R}) \\
\mathcal{F} & \downarrow & \mathcal{O}_d \\
G/H \downarrow \searrow \tilde{\mathcal{F}} & \rightleftharpoons & \downarrow \mathcal{R} \searrow \mathcal{F}(\mathcal{R}) \\
\downarrow \swarrow \hat{H} \leftarrow \hat{G} \leftarrow \widehat{G/H} & & \downarrow \swarrow \hat{H} \leftarrow \widehat{H \times \mathcal{R}} \leftarrow \hat{\mathcal{R}}
\end{array}$$

ここで、 $\mathcal{O}_d$  は  $d$  個の等距離写像から成る Cuntz 環である。

このシナリオで本質的な要件は以下の通り：

a) [ミクロ  $\xrightarrow{\text{凝縮効果}}$  マクロ]: 生成渦中にある動的ミクロ過程からマクロレベルへのマクロ化可視化遷移の物理的本質は、凝縮状態を形成する凝縮過程にあり、その数学的本質は“B-構成法” (“bar-構成法”, “基本構成法”, 等々とも呼ばれる) and/or 「熱核法」を通じて、対象の普遍的分類のために分類指標として機能する位相不変量・ホモトピー不変量を抽出すると共にそれらが形成する分類空間を同定する、ということに他ならない。

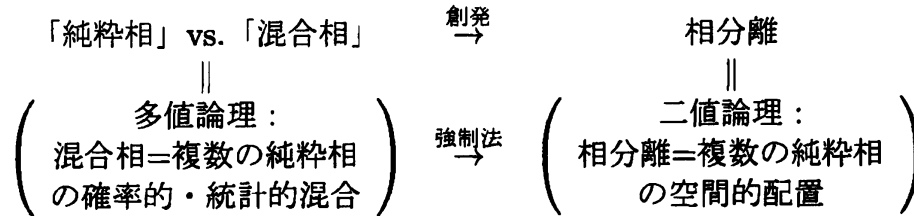
自発的に破れた対称性に伴うセクター構造を記述する文脈での等質空間  $G/H$  は、縮退真空を識別する秩序変数を供給すると同時に、sector bundle,  $\hat{H} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{F}}^H = G \times_H \hat{H} \twoheadrightarrow G/H$ , の底空間として機能することにより、ちょうど分類空間としての普遍的役割を果たす。

b) [ミクロ = 純粋相 & マクロ = 混合相 + 相分離]: 量子的ミクロおよび古典的マクロの相互関係をミクロからのマクロの創発という形で理解する上で、Sec.1 の 2) で述べたセクター = 純粋相と混合相の概念 [1] がここで決定的役割を果たす。Sec.1 で重要なのは、物理量の代数の表現を、準同値関係、即ち、unitary equivalence up to multiplicities に基づいて分類することであった。その分類に関する最小単位が、自明な中心を持つ factor 状態 or factor 表現で、その準同値類を数学的にはセクター、物理的には純粋相と呼んだのが、今、決定な役割を担うのは混合相の方である：確率統計的直和（または直積分）の成分として複数の純粋相（あるいは、セクター）を virtual に含んだ混合相が、どのようにして、異なる空間的場所に異なる純粋相が配置・局在化する real な「相分離」の状況へ転換されるか？つまり、virtual mixture of pure phases  $\xrightarrow{??}$  real mixture of pure phases が、創発過程の問題の本質である。

c) [ミクロ  $\xrightarrow{\text{増幅}}$  マクロ]: 上のミクロ  $\Rightarrow$  マクロの遷移は、測定過程の場合、測定対象と測定装置のミクロ端 (= probe 系) との接触点で起きた量子的状態変化を、測定示針のマクロな動きにまで拡大する増幅過程として現象する [3]。この過程で重要なのは、virtual な確率的混合としての混合相に含まれる複数の異なる純粋相が、測定示針の異なる位置という実空間での異なる空間配置の形を取って、どのように個々の event 毎に分離されるか？という問題である。

つまりこれは、測定反復の時系列の中で、混合相の純粋相への相分離が **Born** 統計公式に従う仕方であるということである。非平衡な相接触のような熱的文脈では、このような相分離は安定性の度合いに応じて、空間的または時系列的に様々な形で現れ得る。

d) [相分離= 強制法]: この相分離という物理的問題は、論理的に見れば、(確率空間における可測集合から成る完備 Boole 代数に値を持つ) 多値論理の文脈から (通常の二値論理の意味での) 単一の真理値を、局所的に選び出すことに対応し、(P.Cohen [6] が連続体仮説の独立性証明に用いたことで有名になった) 「強制法」という論理的方法で統制される問題である。



↔ Born 統計公式: この相分離で二値化された真理点 = events が個々の時空点!

e) 相分離= 強制法と generic filter  $\simeq$  収束部分列とその choices

異なる純粋相の確率的混合としての混合相から、純粋相を一つ一つ取り出して相分離を実現することは、コンパクト集合上の勝手な点列から収束部分列を選び出す操作に相当し、Boole 値論理+強制法の文脈では、“generic filter” の指定に対応する。我々の場合、それによって、(縮退真空の) 分類空間  $G/H = \mathcal{R}$  上で与えられた層から決まるトポスを考えることになり、その **core member** は  $G/H = \mathcal{R}$  上の sector bundle  $\hat{H} \hookrightarrow \hat{\mathcal{F}}^H = G \times_{\hat{H}} \hat{H} \rightarrow G/H$  の断面の層  $\Gamma(G \times_{\hat{H}} \hat{H})$  として、拡張された観測可能量の代数  $\hat{\mathcal{F}}^H$  の factor spectrum  $\hat{\mathcal{F}}^H$  という形で、セクター構造を定める。

これは、DHR セクター理論では局所状態の層  $\mathcal{R} \mapsto E_{\mathcal{A}(\mathcal{R})}$  に対応し、時空領域  $\mathcal{R}$  で測定可能な物理量の局所環  $\mathcal{A}(\mathcal{R})$  上で定義される局所状態  $E_{\mathcal{A}(\mathcal{R})}$  とは、対称性の自発的破れの文脈なら、 $G/H$  に属する縮退真空の或る族を選ぶことに対応する。言い換えれば、縮退真空のある族を選び、その中の真空毎に拡張された観測可能量  $\hat{\mathcal{F}}^H$  の状態を調べることに対応する。

このような対応関係を考慮すれば、各時空点  $x \in G/H = \mathcal{R}$  の内部に量子揺らぎが内在することが容易に了解される。そういう意味において、時空点とは単なる幾何学的点ではなく、高度に非自明な物理的対象だということになる!!

f) [安定性の度合い= 物質の異なる存在レベル]: c) で触れた安定性の異なる度合いという問題は、一つの場所に置かれた物と特定の「場所」に貼り付けられた (物理的) 「名前」との間に、両者の可変性の度合いの違い、という形で扱うことが合理的ではないかと考えられる。そのような種々の安定性の度合いを系統的に扱うことは、自然界に現れる異なる安定化諸領域の相互関係や、生命的有機体の階層構造を、Grothendieck トポス・サイトの視点から満足の行く仕方で見直す作業とも深く結びつくに違いない。



## References

- [1] Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria –Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions–, *Open Systems and Information Dynamics*, **10** (2003), 235-279; How to formulate non-equilibrium local states in QFT?– General characterization and extension to curved spacetime–, pp.365-384 in “*A Garden of Quanta*”, World Scientific (2003).
- [2] Ojima, I., Micro-macro duality in quantum physics, 143-161, *Proc. Intern. Conf. “Stochastic Analysis: Classical and Quantum –Perspectives of White Noise Theory”* ed. by T. Hida, World Scientific (2005).
- [3] Ojima, I., Micro-Macro duality and emergence of macroscopic levels, *Quantum Probability and White Noise Analysis*, **21**, 217 - 228 (2008)); Ojima, I. and Takeori, M., How to observe quantum fields and recover them from observational data? – Takesaki duality as a Micro-Macro duality –, *Open Sys. & Inf. Dyn.* **14**, 307 – 318 (2007) (math-ph/0604054 (2006)); Harada, R. and Ojima, I., A unified scheme of measurement and amplification processes based on Micro-Macro Duality – Stern-Gerlach experiment as a typical example –, *Open Systems and Information Dynamics* **16**, 55–74 (2009).
- [4] Doplicher, S. and Roberts, J.E., Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, *Comm. Math. Phys.* **131** (1990), 51-107; Endomorphism of  $C^*$ -algebras, cross products and duality for compact groups, *Ann. Math.* **130** (1989), 75-119; A new duality theory for compact groups, *Inventiones Math.* **98** (1989), 157-218.
- [5] Ojima, I. and Ozawa, M., Unitary representations of the hyperfinite Heisenberg group and the logical extension methods in physics, *Open Systems and Information Dynamics* **2**, 107-128 (1993).
- [6] Cohen, P.J., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W.A.Benjamin, New York, 1966.